Základní definice

Definice (parciální derivace)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i \in \{1, \dots, d\}$. *Říkáme, že* f *má v bodě* a *parciální derivaci vzhledem k* i*-té souřadnici (podle* x_i*), pokud existuje limita*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

V takovém případě hodnotu limity značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ *(a nazýváme ji parciální derivací funkce* f *vzhledem k* i*-té souřadnici v bodě* a*).*

Základní definice

Definice (parciální derivace)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i \in \{1, \ldots, d\}$. Říkáme, že f má v bodě a parciální derivaci vzhledem k i-té souřadnici (podle x_i), pokud existuje limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

V takovém případě hodnotu limity značíme $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (a nazýváme ji parciální derivací funkce f vzhledem k i-té souřadnici v bodě a).

Triviální pozorování

Položme $g(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_d)$.

Potom platí $g'(a_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pokud jedna z limit existuje.

Rutinní výpočty

Nechť $f(x, y) = x^2y + y^3 + x$ a zvolme $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Rutinní výpočty

Nechť $f(x, y) = x^2 y + y^3 + x$ a zvolme $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Potom pro $g(t) = t^2 b + b^3 + t$ máme $g'(t) = 2tb + 1$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a) = 2ab + 1$.

Rutinní výpočty

Nechť $f(x,y) = x^2y + y^3 + x$ a zvolme $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Potom pro $g(t) = t^2b + b^3 + t$ máme $g'(t) = 2tb + 1$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a) = 2ab + 1$.

Pro $h(t) = a^2t + t^3 + a$ máme $h'(t) = a^2 + 3t^2$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = h'(b) = a^2 + 3b^2$.

Rutinní výpočty

Nechť $f(x,y) = x^2y + y^3 + x$ a zvolme $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Potom pro $g(t) = t^2 b + b^3 + t$ máme $g'(t) = 2tb + 1$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a) = 2ab + 1$.

Pro $h(t) = a^2 t + t^3 + a$ máme $h'(t) = a^2 + 3t^2$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = h'(b) = a^2 + 3b^2$.

Nechť $f(x,y) = y^2 e^{xy}$.

Rutinní výpočty

Nechť $f(x,y) = x^2y + y^3 + x$ a zvolme $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Potom pro $g(t) = t^2b + b^3 + t$ máme $g'(t) = 2tb + 1$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a) = 2ab + 1$.

Pro $h(t) = a^2t + t^3 + a$ máme $h'(t) = a^2 + 3t^2$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = h'(b) = a^2 + 3b^2$.

Nechť $f(x,y) = y^2e^{xy}$.

Potom $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3e^{xy}$ $((Ce^{x\cdot D})' = CDe^{x\cdot D})$

Rutinní výpočty

Nechť $f(x,y) = x^2y + y^3 + x$ a zvolme $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Potom pro $g(t) = t^2b + b^3 + t$ máme $g'(t) = 2tb + 1$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a) = 2ab + 1$.

Pro $h(t) = a^2t + t^3 + a$ máme $h'(t) = a^2 + 3t^2$

a tedy $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = h'(b) = a^2 + 3b^2$.

Nechť $f(x,y) = y^2e^{xy}$.

Potom $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3e^{xy}$ $((Ce^{x\cdot D})' = CDe^{x\cdot D})$

a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{xy} + y^2xe^{xy}$ $((y^2e^{Cy})' = 2ye^{Cy} + Cy^2e^{Cy})$.

Rutinní výpočty

Pro $f(x,y,z) = x^{y+z^2}$ máme

Rutinní výpočty

Pro $f(x,y,z) = x^{y+z^2}$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (y+z^2)x^{y+z^2-1}, \text{ (vzoreček } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \log(x)x^{y+z^2}, \text{ (vzoreček } (a^x)' = \log(a)a^x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z\log(x)x^{y+z^2}.$$

Rutinní výpočty

Pro $f(x,y,z) = x^{y+z^2}$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (y+z^2)x^{y+z^2-1}, \text{ (vzoreček } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \log(x)x^{y+z^2}, \text{ (vzoreček } (a^x)' = \log(a)a^x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z\log(x)x^{y+z^2}.$$

Pro $f(x,y,z) = \dfrac{e^{\sin(yz)} + \arctan(\arcsin(\log(\log(\log(z+y)))))}{\sqrt[15]{y^{71}+z^{71}}}$

Rutinní výpočty

Pro $f(x,y,z) = x^{y+z^2}$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (y+z^2)x^{y+z^2-1},\ (\text{vzoreček } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \log(x)x^{y+z^2},\ (\text{vzoreček } (a^x)' = \log(a)a^x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z\log(x)x^{y+z^2}.$$

Pro $f(x,y,z) = \dfrac{e^{\sin(yz)} + \arctan(\arcsin(\log(\log(\log(z+y)))))}{\sqrt[15]{y^{71}+z^{71}}}$

máme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0.$

Základní definice

Definice (parciální derivace vyšších řádů)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Parciální derivaci 2. řádu funkce f v bodě a vzhledem k i-té a následně j-té souřadnice definujeme jako

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a),$$

pokud existuje a značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \text{pro } i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \quad \text{pro } i = j.$$

Parciální derivace vyšších řádů definujeme analogicky.

Rutinní příklady

Pro $f(x,y) = x^3y$ máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Rutinní příklady

Pro $f(x,y) = x^3 y$ máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Pro $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2}{y^4} e^{\frac{x}{y}}$$

Rutinní příklady

Pro $f(x,y) = x^3 y$ máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Pro $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2}{y^4} e^{\frac{x}{y}}$$

Totální diferenciál

Definice (totální diferenciál)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineální zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to (0,\dots,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

V takovém případě nazýváme zobrazení L totálním diferenciálem (derivací) funkce f v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$).

Totální diferenciál

Definice (totální diferenciál)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineální zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to (0,\dots,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

V takovém případě nazýváme zobrazení L totálním diferenciálem (derivací) funkce f v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$).

Příklad

Pro $f(x,y) = xy$ a $a = (1,3)$ spočítáme totální diferenciál.

Totální diferenciál

Definice (totální diferenciál)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineální zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to (0,\dots,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

V takovém případě nazýváme zobrazení L totálním diferenciálem (derivací) funkce f v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$).

Příklad

Pro $f(x,y) = xy$ a $a = (1,3)$ spočítáme totální diferenciál.

Chceme $$\lim_{(s,t) \to (0,0)} \frac{f(1+s, 3+t) - f(1,3) - L(s,t)}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$$

Tj. $$\lim_{(s,t) \to (0,0)} \frac{(1+s)(3+t) - 1 \cdot 3 - As - Bt}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$$

Totální diferenciál - příklady

Pro $f(x,y) = xy$ a $a = (1,3)$ spočítáme totální diferenciál.

Tj. $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \dfrac{(1+s)(3+t) - 1\cdot 3 - As - Bt}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$

Totální diferenciál - příklady

Pro $f(x,y) = xy$ a $a = (1,3)$ spočítáme totální diferenciál.

Tj. $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \dfrac{(1+s)(3+t) - 1\cdot 3 - As - Bt}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{3 + 3s + t + st - 3 - As - Bt}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{st + (3-A)s + (1-B)t}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$$

Totální diferenciál - příklady

Pro $f(x,y) = xy$ a $a = (1,3)$ spočítáme totální diferenciál.

Tj. $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \dfrac{(1+s)(3+t) - 1\cdot 3 - As - Bt}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{3+3s+t+st-3-As-Bt}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{st+(3-A)s+(1-B)t}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$$

Pokud $A = 3$ a $B = 1$ dostaneme $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \dfrac{st}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$

Tedy $L(s,t) = 3s + t$ je totálním diferenciálem funkce f v bodě $(1,3)$.

A tedy platí $L(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3)\cdot x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3)\cdot y$

Výpočet totálního diferenciálu

Věta (parciální derivace a totální diferenciál)

Nechť f má všechny parciální derivace 1. řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^d$, jsou-li všechny tyto parciální derivace v bodě a spojité, potom f má v bodě a totální diferenciál.

Věta (tvar totálního diferenciálu)

Má-li f totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ pak f má všechny parciální dedivace 1. řádu v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ a platí

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i = \nabla f(a) \cdot h.$$

Vektor

$$\nabla f(a) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \dots \quad \tfrac{\partial f}{\partial x_d}(a) \right) \in \mathbb{R}^d$$

nazýváme gradientem funkce f v bodě a.

Příklady

Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Příklady

Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Funkce má (jako podíl polynomů) určitě spojité všechny parciální derivace (všech řádů) na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Totoální díferenciál f tedy určitě existuje na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Příklady

Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Funkce má (jako podíl polynomů) určitě spojité všechny parciální derivace (všech řádů) na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Totoální díferenciál f tedy určitě existuje na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Chceme-li vyšetřit totální diferenciál v počátku, potřebujeme spočítat limitu

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{f(s,t) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot s - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot t}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$$

$f(x,0) = x^3$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 3x^2$,

$f(0,y) = y^2$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y$.

Příklady

Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Funkce má (jako podíl polynomů) určitě spojité všechny parciální derivace (všech řádů) na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Totoální díferenciál f tedy určitě existuje na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Chceme-li vyšetřit totální diferenciál v počátku, potřebujeme spočítat limitu

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{f(s,t) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot s - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot t}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$$

$f(x,0) = x^3$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 3x^2$,
$f(0,y) = y^2$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y$.

Počítáme tedy limitu $\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s^5+t^4}{\sqrt{s^2+t^2}(s^2+t^2)} =: \lim_{(s,t)\to(0,0)} g(s,t)$.

Příklady

Má funkce
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5+y^4}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pokud } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$
totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Počítáme limitu $\displaystyle\lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{s^5+t^4}{\sqrt{s^2+t^2}(s^2+t^2)} =: \lim_{(s,t)\to(0,0)} g(s,t).$

Příklady

Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Počítáme limitu $\displaystyle\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s^5+t^4}{\sqrt{s^2+t^2}(s^2+t^2)} =: \lim_{(s,t)\to(0,0)} g(s,t).$

V polárních souřadnicích dostáváme pro $0 < r < 1$

$$|g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)| = \left|\frac{r^5\cos^5\alpha + r^4\sin^4\alpha}{r^3}\right| = r|r\cos^5\alpha + \sin^4\alpha| \leq 2r.$$

A tedy f má totální diferenciál v bodě $(0,0)$ (a tedy na celém $\mathbb{R}^2$)

Příklady

Má funkce $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Příklady

Má funkce $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Funkce má (opět) určitě spojité všechny parciální derivace (všech řádů) a tedy i totální diferenciál na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Spočítáme potenciální předpis pro totální diferenciál v $(0,0)$:

$f(x,0) = x$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 1$,
$f(0,y) = y$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 1$.

Příklady

Má funkce $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Funkce má (opět) určitě spojité všechny parciální derivace (všech řádů) a tedy i totální diferenciál na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Spočítáme potenciální předpis pro totální diferenciál v $(0,0)$:

$f(x,0) = x$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 1$,

$f(0,y) = y$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 1$.

Tj. pokud $df(0,0)$ existuje, platí $df(0,0)(s,t) = s + t$ a počítáme limitu

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{s^3+t^3} - s - t}{\sqrt{s^2+t^2}} =: \lim_{(s,t)\to(0,0)} g(s,t).$$

Příklady

Má funkce $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

Funkce má (opět) určitě spojité všechny parciální derivace (všech řádů) a tedy i totální diferenciál na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Spočítáme potenciální předpis pro totální diferenciál v $(0,0)$:

$f(x,0) = x$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 1$,
$f(0,y) = y$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 1$.
Tj. pokud $df(0,0)$ existuje, platí $df(0,0)(s,t) = s + t$ a počítáme limitu

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{s^3+t^3} - s - t}{\sqrt{s^2+t^2}} =: \lim_{(s,t)\to(0,0)} g(s,t).$$

Dále $\lim\limits_{s\to 0} g(s,s) = \lim\limits_{s\to 0} \frac{\sqrt[3]{2s^3} - 2s}{\sqrt{2s^2}} = \lim\limits_{s\to 0} \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0.$

Funkce tedy totální diferenciál v bodě $(0,0)$ nemá.